

Leçon 158 : Endom. remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dim. finie). Exemples. Applications

[Boy] : *Algèbre et géométries*, Pascal Boyer

[Cia] : *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*, Phillipe Ciarlet

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

[Tau] : *Géométrie*, Patrice Tauvel

I Partie A - Préambule [Rom] [Man-Mne]

Thm 1 (Riesz) :

Déf 2 (Adjoint) :

Ex 3 : Adjoint d'une matrice dans un produit scalaire associé à une matrice.

Prop 4 (Propriétés élémentaires) :

Prop 5 (Matrice de l'adjoint) :

Prop 6 : Si F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

II Partie B - Isométries

II.1 Isométries et groupe orthogonal [Gri] [Szp] [Man-Mne]

Déf 7 (Isométries vectorielle) :

Contre-Ex 8 :

Ex 9 : Projecteur orthogonal, symétrie orthogonale.

Rem 10 : Traduction matricielle.

Déf 11 (Matrice orthogonale) :

II.2 En petite dimension [Szp] [Boy][Tau]

Déf 12 (Rotations et symétries orthogonales) :

Ex 13 : [Annexe : Rotations et symétries]

Prop 14 (Structure de $O_2(\mathbb{R})$) :

Rem 15 : $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

App 16 (Structure de $Is(\mathbb{R}^2)$) :

Prop 17 (Sous-groupes de SO_2) :

Déf 18 (Pavage) :

 **Dév 19 (Classification des pavages directs) :**

III Partie C - Endomorphismes autoadjoints [Rom] [Man-Mne]

III.1 Premiers pas sur les endomorphismes autoadjoints

Déf 20 (Endomorphisme autoadjoint) :

Ex 21 (Projecteur orthogonal) :

Prop 22 (Lien endomorphisme autoadjoint et matrice symétrique) :

Cor 23 (Dimension) :

Prop 24 : Si u est autoadjoint et F stable par u , alors $F^\perp$ stable par u .

Déf 25 (Endomorphisme symétriques positifs, définis positifs) :

Ex 26 : Matrice du Laplacien

III.2 Réduction des autoadjoints [Cia] [Rom] [Man-Mne]

Prop 27 (Spectre) :

Ex 28 : Spectre de la matrice du Laplacien.

Thm 29 (Théorème spectral) :

Ex 30 : Voir [Gri] (Exo 33) ou [Rom] (Exo 12)

App 31 : Voir [Gri] (Exo 36)

App 32 (Racine carré) :

III.3 Analyse numérique [Rom] [Cia] [Sch]

Prop 33 (Norme subordonnée d'un symétrique) :

Ex 34 : Norme 2 de l'exemple [Gri] (Exo 33)

■ **Prop 35 (Conditionnement d'un symétrique) :**

■ **Ex 36 :** Conditionnement (mauvais) du Laplacien

■  **Dév 37 (Courant Fischer) :**

■  **Dév 38 (Weyl) :**

IV Partie D - Décomposition polaire [Rom] [Szp]

IV.1 Le théorème

■ **Thm 39 (Décomposition Polaire) :**

■ **Ex 40 :**

IV.2 Utilisation

■ **Thm 41 (Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$) :**

■ **Thm 42 :** $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

■ **Thm 43 (Points extrémaux de $O_n(\mathbb{R})$) :**

■  **Dév 44 (Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$) :**